

各向异性的分形地形生成方法研究

夏伟杰 周建江 姚楠

(南京航空航天大学信息科学与技术学院, 南京 210016)

摘要 传统的分形地形生成方法得到的地形是各向同性的,为了使生成的分形地形具有各向异性特征,提出了一种新的分形地形生成方法,该方法利用组合分形布朗曲面模型,将具有不同特征的两种分形布朗曲面相融合,使得生成的地形具有各向异性特征。对组合分形布朗曲面算法进行了仿真实验,生成了最终的分形地形。对仿真结果的分析表明,生成的分形地形的特征具有各向异性特征,和实际的自然地形特征相符合,从而证明了该算法的有效性。

关键词 分形布朗曲面 随机中点位移法 各向异性 组合分形布朗曲面

中图法分类号: TP75 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2009)11-2356-06

Anisotropic Fractal Terrain Generation

XIA Wei-jie, ZHOU Jian-jiang, YAO Nan

(College of Information Science and Technology, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016)

Abstract The traditional fractal method for terrain generation has an isotropic fractal feature. In order to generate anisotropic terrain, a new approach to generating anisotropic terrain based on fractal is proposed in this paper. This approach uses the combined fractal Brown surface (CFBS) model and incorporates two fractal Brown surface (FBS) with different fractal features. The fractal features of the corresponding terrain are anisotropic. Finally, some simulations based on CFBS are conducted and the final figures of the corresponding terrains are shown in this paper. The analyses of the simulation results show that the fractal feature is anisotropic, which is accordant to the actual terrain. The simulation results verify the validity of the CFBS model.

Keywords fractal Brown surface (FBS), random midpoint displacement (MPD), isotropic, combine fractal Brown surface (CFBS)

1 引言

在典型地形的 SAR 回波仿真与图像仿真研究中,地形数据的描述与生成是其中关键的一步。自然界中存在的许多地形(如海岸线、山脉等)都具有分形特性,描述这种特性最好的数学模型是 Mandelbrot 提出的分形布朗运动,它能够有效地表达自然界中的各种地形特征。文献 [1] ~ [3] 从数学角度给出了分形布朗运动和分形布朗曲面的详细

处理方法。迄今为止,已构造出多种符合分形布朗运动特性的空间曲面合成方法,包括泊松阶跃法、逆傅里叶变换法、逐次随机增加法^[4]、随机中点位移法 (MPD)。其中随机中点位移法^[5-8] 由于易于实现且运行速度快,已成为计算机地形模拟中的一种代表性的方法。依据随机中点位移法在实际使用中的构网方式不同,可以分为三角形网、四边形网、菱形方形网等。无论是哪一种实现方法,其地形生成过程都与地形的方向无关,也就是生成的最终地形将是各向同性的。而文献 [9] 指出真实地形是各向异

基金项目:总装备部重点预研基金项目

收稿日期:2008-04-08; 改回日期:2008-10-07

第一作者简介:夏伟杰(1979 ~),男,讲师。南京航空航天大学信号与信息处理专业博士研究生。主要研究方向为分形几何、SAR 回波仿真与 DSP 应用。已经在国内期刊和国际会议上发表论文 3 篇。E-mail:nuaxwj@nuaa.edu.cn

性的,即在不同的方向上,真实地形的粗糙度是不一样的。为此,对原有的分形布朗曲面算法进行了改进,提出了组合分形布朗曲面方法,使得生成的地形在各个方向上具有不同的维数,生成的分形地形具有各向异性性质。最后运用组合 MPD 方法对组合分形布朗曲面方法进行了仿真实验,对仿真结果的分析表明该方法是正确有效的。

2 分形布朗曲面

通常来说分形布朗运动是以单个变量 t 为自变量的函数,现用坐标 (x, y) 来代替分形布朗运动中的变量 t ,则随机变量 $X(x, y)$ 可以被认为是曲面在点 (x, y) 的高度。相应地,分形布朗运动的概念可以被推广到分形布朗曲面上。分形布朗曲面定义如下^[10]:

对 $0 < H < 1$, 定义指数为 H 的布朗函数 $X: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ 为一高斯随机函数,且满足:

(1) 以概率 1, $X(0, 0) = 0$, 且 $X(x, y)$ 为 (x, y) 的连续函数。

(2) 对 $(x, y), (h, k) \in \mathbf{R}^2$, 高维增量 $X(x + h, y + k) - X(x, y)$ 服从均值为 0, 方差为 $(h^2 + k^2)^H$ 的正态分布,即

$$P\{X(x + h, y + k) - X(x, y) < Z\} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi(h^2 + k^2)^H}}\right) \int_{-\infty}^Z \exp\left(\frac{-u^2}{2(h^2 + k^2)^H}\right) du \quad (1)$$

则称曲面 $\{(x, y, X(x, y)) : (x, y) \in \mathbf{R}^2\}$ 为指数为 H 的布朗曲面。

下面证明该分形布朗运动曲面是各向同性的。

取一任意垂直平面 A , A 与 x 轴的夹角为 θ , A 平面与布朗曲面相交得到一条曲线 S 。取曲线上任意两点 $S_1(r), S_2(r + Vr)$, 根据坐标对应关系有

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, y = r \sin \theta, \\ h &= \Delta r \cos \theta, k = \Delta r \sin \theta \end{aligned} \quad (2)$$

相应地,曲线上两点 S_1, S_2 的增量的概率分布可以写为

$$\begin{aligned} P\{S_1(r + \Delta r) - S_2(r) \leq Z\} &= P\{X(r \cos \theta + \Delta r \cos \theta, r \sin \theta + \Delta r \sin \theta) - X(r \cos \theta, r \sin \theta) < Z\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi((\Delta r \cos \theta)^2 + \Delta r \sin \theta)^H}} \times \int_{-\infty}^Z \exp\left(\frac{-u^2}{2((\Delta r \cos \theta)^2 + (\Delta r \sin \theta)^2)^H}\right) du \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot (\Delta r)^H} \int_{-\infty}^Z \exp\left(\frac{-u^2}{2(\Delta r)^{2H}}\right) du \quad (3)$$

因此, S_1, S_2 两点的增量服从均值为 0, 方差为 $(\Delta r)^{2H}$ 的正态分布,增量只与增量 Δr 有关,与角度 θ 无关,且分形指数 H 也与角度 θ 无关。因此该分形布朗曲面所对应的地形是各向同性的。

MPD 算法是一种直接模拟分形布朗曲面的方法,其基本思路就是对线段中点处的高度进行位移,将位移的高度值作为该点的值,然后将分割的线段再细分出中点,并加以中点偏移,如此反复直到达到预定的迭代层数。该方法用以地形模拟时,存在一个构网方式问题,现已提出的构网方式有三角网^[11]、四边形网^[12]等,其中三角形网的实现最为简单且合成速度快,用这种方法产生地形的过程如图 1 所示。

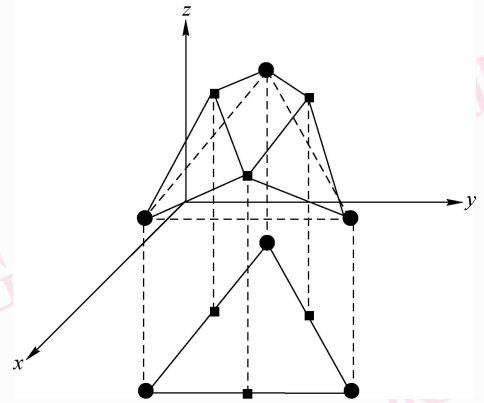


图 1 三角形网迭代关系

Fig. 1 Iteration of triangle net

MPD 算法细分过程中,中点位移量为

$$\begin{aligned} x_n \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) &= \frac{1}{2} [x_{n-1}(x_1, y_1) + x_{n-1}(x_2, y_2)] + \Delta_n \quad (4) \end{aligned}$$

Δ_n 是均值为 0, 方差为 σ^2 的高斯随机变量,可推得第 n 步细分时,

$$\Delta_n = \left(\frac{1}{2^n}\right)^H \sigma \sqrt{1 - 2^{(2H-2)}} \cdot g \quad (5)$$

g 是服从 $N(0, 1)$ 分布的高斯随机变量。

从以上对 MPD 实现方法的描述当中可以看出,MPD 方法在实现分形布朗曲面的过程中,并没有考虑到地形特征的方向性,其增量 Δ_n 的控制参数与方向无关。因此 MPD 方法生成的地形是各向同性的。

根据分形布朗运动的定义,其增量的方差应该满足下式

$$E(|f(x + \Delta x) - f(x)|) \cdot \|\Delta x\|^{-H} = C \quad (6)$$

式中, x 为 \mathbf{R}^2 中任一点, $E(|f(x + \Delta x) - f(x)|)$ 是给定间隔 Δx 得分形布朗函数值的期望值^[13], 常数 C 与标准差 σ 的关系为

$$C = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sigma \quad (7)$$

对式(6)两边取对数可得

$$\begin{aligned} \log[E(|f(x + \Delta x) - f(x)|)] - H \log \|\Delta x\| \\ = \log C \end{aligned} \quad (8)$$

因此分形布朗运动函数的参数 H 和 $\log C$ 分别为函数 $\{\log \|\Delta x\|, \log[E(|f(x + \Delta x) - f(x)|)]\}$ 的斜率和截距, 于是可通过在对数图中拟合一条直线的方法获取参数分形指数 H 。对于 3 维曲面, 参数 H 和分形维数 D 关系为

$$D = 3 - H \quad (9)$$

从而可得到分形维数。

3 组合分形布朗曲面

基于以上对分形布朗曲面以及其实现方法 MPD 算法的研究, 提出一种新的基于 MPD 方法的组合分形布朗曲面模型, 实现分形地形的各向异性特征。参考文献[14]中的 1 维时间分形组合模型, 并将其推广到 2 维情况。假设某点的高程值为两个分形参数分别为 H_x 和 H_y 的分形布朗运动 f_x 与 f_y 的组合, 即

$$f(l) = pf_x(l_x) + (1-p)f_y(l_y) \quad (10)$$

其中,

$$\begin{aligned} f_x(l_x + \Delta l_x) - f_x(l_x) &\sim N(0, \sigma_x^2 \Delta l_x^{2H_x}), f_y(l_y + \\ \Delta l_y) - f_y(l_y) &\sim N(0, \sigma_y^2 \Delta l_y^{2H_y}) \end{aligned}$$

式中 l 代表 2 维空间中的一点, Δl 代表给定的间隔; p 为权重因子, 取值在 0 和 1 之间。 $f_x(l_x), f_y(l_y)$ 分别表示水平、垂直方向的分形布朗运动; $\Delta l_x, \Delta l_y$ 分别表示 Δl 在水平、垂直方向的分量;

$$\sigma_x^2 = \text{Var}[f_x(l_x + \Delta l_x) - f_x(l_x)]$$

$$\sigma_y^2 = \text{Var}[f_y(l_y + \Delta l_y) - f_y(l_y)]$$

式中, $\text{Var}(\cdot)$ 为求方差函数。

设 $f_x(l_x + \Delta l_x) - f_x(l_x), f_y(l_y + \Delta l_y) - f_y(l_y)$ 的相关系数为 ρ , 则它们的协方差可以表示为

$$\begin{aligned} \text{Cov}[f_x(l_x + \Delta l_x) - f_x(l_x), f_y(l_y + \Delta l_y) - f_y(l_y)] \\ = \rho \sigma_x \sigma_y \Delta l_x^{H_x} \Delta l_y^{H_y} \end{aligned} \quad (11)$$

可计算

$$\begin{aligned} E\{[f(l + \Delta l) - f(l)]^2\} &= p^2 E\{[f_x(l_x + \Delta l_x) - \\ f_x(l_x)]^2\} &+ (1-p)^2 E\{[f_y(l_y + \Delta l_y) - f_y(l_y)]^2\} + \\ 2p(1-p) E\{[f_x(l_x + \Delta l_x) - f_x(l_x)]\} &\cdot E\{[f_y(l_y + \\ \Delta l_y) - f_y(l_y)]\} \end{aligned} \quad (12)$$

利用式(11)和式(12), 同时为了方便起见, 记 $E([f(l + \Delta l) - f(l)]^2) = \sigma^2(\Delta l)$, 有

$$\begin{aligned} \sigma^2(\Delta l) &= p^2 \sigma_x^2 \Delta l_x^{2H_x} + (1-p)^2 \sigma_y^2 \Delta l_y^{2H_y} + \\ 2p(1-p) \Delta l_x^{H_x} \Delta l_y^{H_y} \rho \sigma_x \sigma_y \end{aligned} \quad (13)$$

考虑到 $\Delta l_x = \Delta l \cos \theta, \Delta l_y = \Delta l \sin \theta$ (θ 表示当前地形方向与水平方向的夹角), 将此代入式(13)并取对数可得

$$\begin{aligned} 2 \log[\sigma^2(\Delta l)] &= \log[p^2 \sigma_x^2 (\cos \theta)^{2H_x} \Delta l^{2H_x} + \\ (1-p)^2 \sigma_y^2 (\sin \theta)^{2H_y} \Delta l^{2H_y} &+ 2p(1-p) \Delta l^{H_x+H_y} \times \\ (\cos \theta)^{H_x} (\sin \theta)^{H_y} \rho \sigma_x \sigma_y] \end{aligned} \quad (14)$$

上式两边对 $\log(\Delta l)$ 取导数, 同时为了方便起见, 记:

$$A = p^2 \sigma_x^2 (\cos \theta)^{2H_x} \Delta l^{2H_x}$$

$$B = (1-p)^2 \sigma_y^2 (\sin \theta)^{2H_y} \Delta l^{2H_y}$$

$$C = 2p(1-p) \Delta l^{H_x+H_y} (\cos \theta)^{H_x} (\sin \theta)^{H_y} \rho \sigma_x \sigma_y$$

有下式成立:

$$\frac{2 \text{dlog} \sigma(\Delta l)}{\text{dlog} \Delta l} = \frac{2H_x A + 2H_y B + (H_x + H_y) C}{A + B + C} \quad (15)$$

将式(15)改写为如下形式:

$$\frac{\text{dlog} \sigma(\Delta l)}{\text{dlog} \Delta l} = H_x + \frac{-\left(B + \frac{C}{2}\right)(H_y - H_x)}{A + B + C} \quad (16)$$

根据前节所述, 分形指数 $H = \frac{\text{dlog} \sigma(\Delta l)}{\text{dlog} \Delta l}$ 。 H 与

$H_x, H_y, p, \theta, \sigma_x$ 及 σ_y 均相关, 最终生成的地形的 H 参数中包含了具有方向性 θ 分形特征的信息。从式(16)有如下推论:

推论 1 当 $\theta = 0^\circ$ 时, $H = H_x$; 当 $\theta = 90^\circ$, $H = H_y$, 此结论符合初始设定条件;

推论 2 当 $H_x = H_y$ 时, $H = H_x = H_y$, 这个结论说明不论两个分形布朗曲面的相关系数和加权系数为多少, 两个分形指数完全相同的分形布朗曲面叠加的分形指数仍然为原来的分形指数。

推论 3 当 $\rho = 0$ 时,

$$H = \frac{\text{dlog} \sigma(\Delta l)}{\text{dlog} \Delta l} = H_x + \frac{-B(H_y - H_x)}{A + B} \quad (17)$$

上式对应于两个完全不相关的分形布朗曲面的线性叠加。

4 各向异性指数

为了表征地形各向异性的程度,引入各向异性指数 V 这个参数,定义各向异性指数 V 为^[15]

$$V = [\max(H) - \min(H)] / \bar{H} \quad (18)$$

其中, $H = \{H(1), H(2), \dots, H(i), \dots\}$, $H(i)$ 为生成的地形某一方向上的分形指数。 \bar{H} 为 H 的平均值。根据文献[15]的结论,可以设定一个阈值 T ,如果 $V > T$,则判定当前生成的地形为各向异性,反之则为各向同性地形。大量的结果表明, $T = 0.5$ ^[15]。

5 地形模拟与分析

根据上述分析,采用组合 MPD 方法来实现组合

分形布朗曲面,进行相关的地形模拟和分析,通过对比以验证上述组合分型布朗曲面模型的正确性。

先进行未改进之前的分形布朗曲面地形生成方法的仿真,采用传统的 MPD 方法进行地形的生成,仿真的时候分别取分形指数 $H = 0.35$ 和 $H = 0.7$,迭代生成的地形点数为 $1\ 024 \times 1\ 024$ 点,得到的地形数据分别记为 DEM_1 和 DEM_2 ,相应的高度图如图 2 所示。

图 2 中,定义地形的 3 维坐标中 x 坐标为方位向, y 坐标为距离向,分辨率均为 2m。 z 坐标为地形高度。

对上述地形数据进行分形指数与方位角之间关系的分析,选取方位角从 0° 到 360° 度之间的 24 个方向做分形指数^[16] 计算,以验证上述分形地形分形维数的方向性。计算结果以极坐标的形式来表示,如图 3 所示。

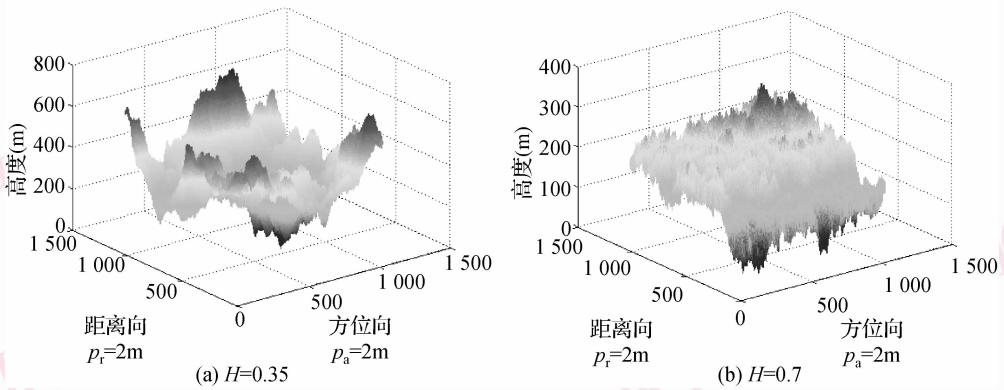


图 2 不同分形指数的地形
Fig. 2 Terrain with fractal exponent

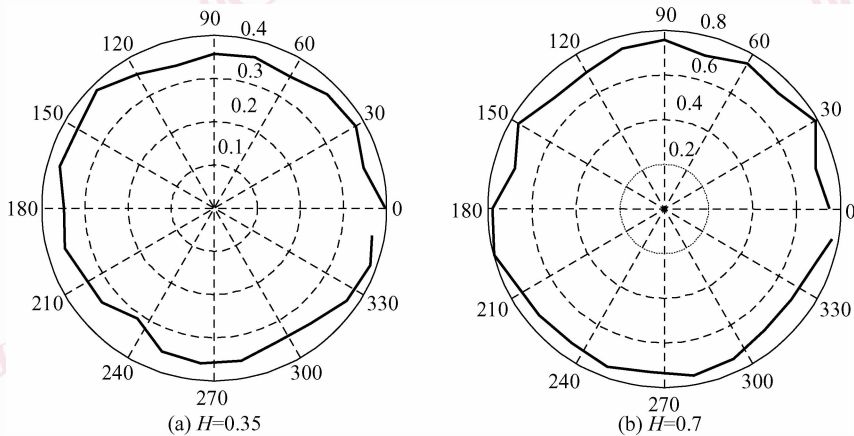


图 3 地形的分形指数和方位角之间的关系
Fig. 3 The relation between fractal exponent and azimuth angel

图 3 是图 2 中地形数据分形指数的计算结果, 上述极坐标图中以方位角为极角, 分形指数为极径。

为了定量描述 DEM_1 和 DEM_2 中地形数据的各向异性特征, 按照式 (18) 分别计算上述地形各自各向异性指数 V 。先计算地形数据 DEM_1 所对应的各向异性指数:

$$V_1 = 0.254 < T$$

再计算地形数据 DEM_2 所对应的各向异性指数:

$$V_2 = 0.239 < T$$

根据第 4 节给出的判定标准, 地形 DEM_1 和 DEM_2 均为各向同性地形。从而验证了第 2 节中对

分形布朗曲面各向同性的理论推导

下面对第 3 节中所提出的组合分形布朗曲面方法进行验证。仿真中, 参数选取为 $\rho = 0.8, \sigma_x = \sigma_y = 1$, 分别取 x 方向和 y 的分形指数为 $H_x = 0.3, H_y = 0.6$ 和 $H_x = 0.4, H_y = 0.8$ 。迭代生成的地形点数同样为 $1\ 024 \times 1\ 024$ 点, 得到的地形数据分别记为 DEM_3 和 DEM_4 , 相应的高度图分别如图 4 所示。

再对地形数据 DEM_3 和 DEM_4 进行分形指数与方位角之间的关系分析, 同样选取方位角从 0° 到 360° 之间的 24 个方向作分形指数计算。计算结果以极坐标的形式来表示, 如图 5 所示。

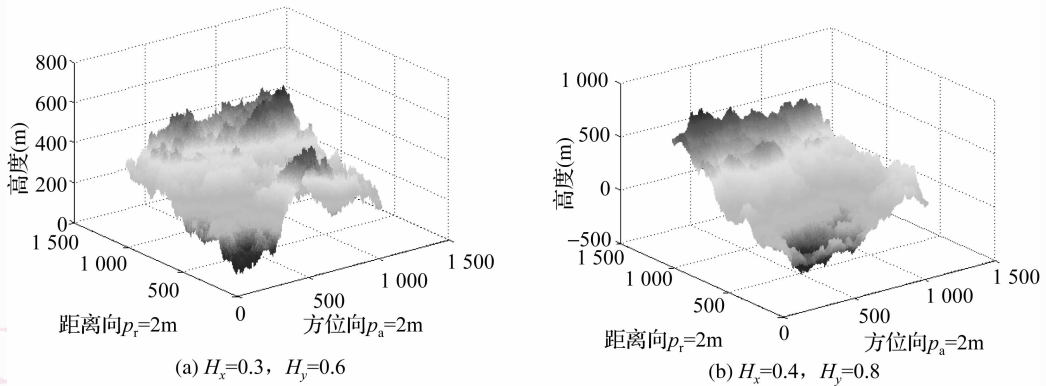


图 4 分形指数对应的地形
Fig. 4 Terrain with fractal exponent

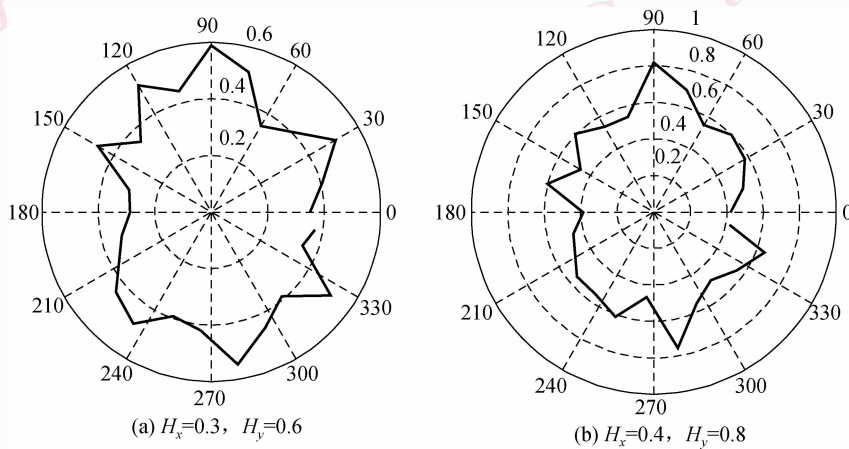


图 5 地形的分形指数和方位角之间的关系
Fig. 5 The relation between fractal exponent and azimuth angel

同样按照式 (18) 分别计算上述地形各自各向异性指数 V 。先计算 DEM_3 所对应的各向异性指数:

$$V_3 = 0.774 > T$$

再计算 DEM_4 所对应的各向异性指数:

$$V_4 = 0.681 > T$$

根据第 4 节给出的判定标准,地形 DEM_3 和 DEM_4 均为各向异性地形。从而证明了组合分形布朗曲面方法的正确性。

6 结 论

首先对分形布朗曲面及其实现方法进行了分析,从理论上证明了该方法生成的地形具有各向同性的特点。为了解决上述问题,在上述分析的基础上提出了一种组合分形布朗曲面的方法,该模型包含了两个分形布朗运动。给出了组合分形布朗曲面的分形指数的表达公式,式中分形指数包含了方位角的参量,从理论上证明了该方法具有各向异性特征。仿真结果表明,该方法生成的地形数据在各个方向上具有不同的分形特征,验证了该方法的正确性,实现了对真实地形各向异性特征的模拟。同时该组合分形布朗曲面模型继承了 MPD 方法易于实现、代码量少、计算快速的特点,适合于为下一步开展典型地形 SAR 回波仿真提供快速有效的地形数据来源。

作为这方面工作的进一步深化,未来可以考虑包含更多分形布朗运动的组合布朗运动曲面,本文的推导方法依然适用,不过最终的分形特征计算公式将更为复杂。同时相关系数 ρ 的含义还有待进一步研究。

参考文献 (References)

- Mandelbrot B B. Gaussian Self-Affinity and Fractals. Globality, the Earth, 1/f Noise, and R/S [M]. New York: Springer-Verlag, 2002: 22-30.
- Falconer K J, Levy V J. Horizons of fractional Brownian surfaces [A]. In: Royal Society of London Proceedings (Series A) 2000 [C], London, UK, 2000, **456**:2153-2178.
- Embrechts P, Maejima M. Selfsimilar Processes [M]. Elizabeth, NJ, USA: Princeton University Press, 2002:50-55.
- McGaughey D R, Aithen G J M. Statistical analysis of successive random additions for generating fractional Brownian motion [J]. Physica A, 2000, **11**(1): 25-34.
- Yang Yan-chun, Bao Jin-song, Jin Ye. Realistic virtual lunar surface simulation method [J]. Journal of System Simulation, 2007, **19**(11): 2515-2518. [杨艳春, 鲍劲松, 金焱. 一种真实感虚拟月面建模方法 [J]. 系统仿真学报, 2007, **19**(11): 2515-2518.]
- Li Xu-tao, Zhu Guang-xi, CAO Han-qiang, et al. Anisotropy multi-scale self-similarity random field and terrain construction [J]. Journal of Image and Graphics, 2007, **12**(7): 1286-1290. [李旭涛, 朱光喜, 曹汉强等, 各向异性多尺度自相似随机场与地形构建 [J]. 2007, **12**(7): 1286-1290.]
- Perez M, Fernandez M, Morillo P, et al. Locally constrained synthetic LoDs generation for natural terrain meshes [J]. Future Generation Computer Systems, 2004, **20**(8): 1375-1387.
- Li Qing-zhong, Gao Xiu-rong. Study on generating method for 3D controllable and realistic terrain [J]. Journal of System Simulation, 2008, **20**(11): 2938-2941. [李庆忠, 高秀荣. 三维可控真实感地形生成方法研究 [J]. 系统仿真学报, 2008, **20**(11): 2938-2941.]
- Ebert, Musgrave, Peachey, et al. Textures and Modeling: A Procedural Approach [M]. New York: Academic Press, 2002: 102-120.
- Falconer K. Fractal Geometry [M]. Chichester, UK: Wiley, 1990: 101-102.
- Sharifi M, Golpaygani F H, Esmaeli M. A new fractal-based approach for 3D visualization of mountains in VRML standard [J]. In: Proceedings of the 2nd International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques in Australasia and South East Asia 2004 [C], Singapore, 2004, **11**(6): 100-105.
- Lin Lan. Research on Rendering of High-precision Terrain Based on Fractal [D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2006. [林岚. 基于分形理论的高精度地形绘制算法研究 [D]. 武汉: 华中科技大学, 2006.]
- Qin S F, Harrison R, WEST A A, et al. Development of a novel 3D simulation modeling system for distributed manufacturing [J]. Computer in Industry, 2004, **54**(1): 69-81.
- Zhu Ju-bo, Liang Dian-nong. Combined fractal Brown motion model [J]. Science in China, (Ser E), 2000, **30**(4): 312-319. [朱炬波, 梁甸农. 组合分形 Brown 运动模型 [J]. 中国科学 (E 辑), 2000, **30**(4): 312-319.]
- Li Meng, Zhu Ling-ren, Long Hai-ying. Research on fractal and multi-fractal properties of landform surface in tianshan area, xinjiang, china [J]. Inland Earthquake, 2003, **17**(01), 20-26. [李猛, 朱令人, 龙海英. 新疆天山地区地貌分形与多重分形特征研究 [J]. 内陆地震, 2003, **17**(01): 20-26.]
- Xu Jing, Ren Li-liang, Cheng Yuan-hua, et al. Topographic index calculation that is independent of the DEM spatial resolution [J]. Journal of Tsinghua University (Science and Technology), 2008, **48**(16), 983-986. [徐静, 任立良, 程媛华等. 不受 DEM 空间分辨率影响的地形指数计算 [J]. 清华大学学报, 2008, **48**(16): 983-986.]